



Mid and high frequency vibration analysis of line connected uncertain composite structures by using modal impedance based statistical energy analysis procedure

Abdullah Seçgin¹ , Murat Kara^{1*} , Serkan Güler² 

¹Dokuz Eylül University, Department of Mechanical Engineering, Buca, İzmir, 35397, Turkey

²İskenderun Technical University, Department of Mechanical Engineering, Hatay, 31200, Turkey

Highlights:

- A modal impedance based SEA technique is introduced for line connected systems.
- A line connected stiffened composite plate having uncertainty is considered as a test system.
- Proposed technique presents a unique advantage in estimating mid and high frequency responses of complex structures since it protects modal behaviors in response spectra.

Keywords:

- Composite plate
- Mid frequency
- Uncertainty
- Line connection
- Statistical energy analysis

Article Info:

Received: 06.11.2017

Accepted: 06.01.2018

DOI:

10.17341/gazimmfd.416532

Acknowledgement:

This study was supported by TUBİTAK for the Project 112M836.

Correspondence:

Author: Abdullah Seçgin
e-mail: abdullah.secgin@deu.edu.tr
phone: +90 232 301 9228

Graphical/Tabular Abstract

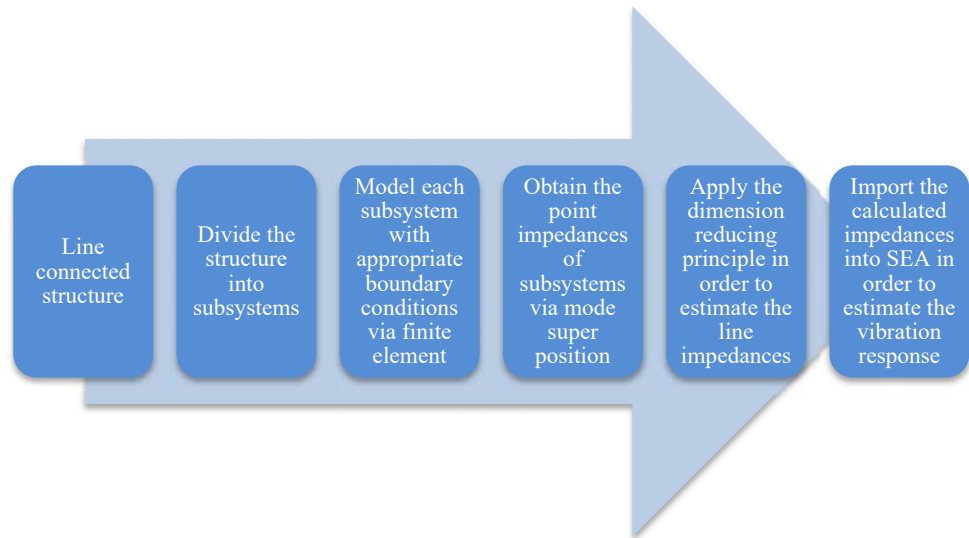


Figure A. Scheme of the proposed procedure

Purpose: In this paper, a procedure for mid and high frequency vibration analysis of line connected composite structures having structural uncertainty is proposed.

Theory and Methods:

The procedure proposed here calculates finite system impedances in terms of modal information for each subsystem and uses these impedances in the prediction of Statistical Energy Analysis (SEA) parameters. Modal information is extracted from finite element method by providing approximate physical boundary condition similarity of each subsystem with entire system. The procedure, on the contrary of classical SEA, considers not only driving point infinite impedances but also transfer point finite impedances to represent the total energy of the finite system more realistically. The procedure utilizes a dimension reducing principle based on point impedances to obtain line connection impedances.

Results:

An uncertain stiffened composite plate is considered in order to test the accuracy of the procedure. Its accuracy and capacity are presented by the results of finite element method based Monte Carlo simulations and classical SEA. It is seen that, the procedure is able to estimate the modal behavior of the subsystems with low simulation time in mid and high frequency regions.

Conclusion:

As a result, it is shown that the proposed procedure is successful for uncertain line connected structures as a hybrid method that combines the advantages of classical IEA and finite element methods together.



Bir modal empedans tabanlı istatistiksel enerji analizi yordamı ile çizgisel bağlantılı belirsiz kompozit yapıların orta ve yüksek frekans titreşim analizi

Abdullah Seçgin¹, Murat Kara^{1*}, Serkan Güler²

¹Dokuz Eylül Üniversitesi, Makina Mühendisliği Bölümü, Buca, İzmir, 35397, Türkiye

²İskenderun Teknik Üniversitesi, Makina Mühendisliği Bölümü, Hatay, 31200, Türkiye

ÖNEÇİKANLAR

- Çizgisel bağlantılı yapıların titreşim analizi için modal empedans tabanlı istatistiksel enerji analizi
- Çizgisel empedansların belirlenmesi için boyut indirgeme prensibi
- Belirsizlikleri hesaba katabilen, orta ve yüksek frekans bölgesi için titreşim analiz yöntemi

Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi
Geliş: 06.11.2017
Kabul: 06.01.2018

DOI:

10.17341/gazimmfd.416532

Anahtar Kelimeler:

Kompozit plaka,
orta frekans,
yüksek frekans,
belirsizlik, çizgisel bağlantı,
istatistiksel enerji analizi

ÖZET

Bu çalışmada, kütleli rastgelelikle elde edilen yapısal belirsizliğe sahip çizgisel bağlı kompozit yapıların orta ve yüksek frekans titreşim analizi için bir modal empedans tabanlı istatistiksel enerji analizi (İEA) yordamı sunulmuştur. Önerilen yaklaşım her bir altsistemin modal bilgilerini elde ederek sonlu sistem empedanslarını hesaplar ve bu empedansları İEA parametrelerinin tahmin edilmesinde kullanır. Modal bilgiler, her bir altsistemin tüm sisteme göre yaklaşık fiziksel sınır koşulu benzerliğini de sağlayarak, sonlu elemanlar metodu (SEM) ile hesaplanır. Yöntem, klasik İEA yönteminin aksine sadece zorlama noktası sonsuz empedansını değil sonlu noktasal transfer empedanslarını da hesaba katarak, sonlu sistemin toplam enerjisini daha gerçekçi olarak ortaya koymaktadır. Bu yöntem çizgisel bağlantı empedanslarını elde etmek için, noktasal empedanslar üzerinden gerçekleştirilen bir boyut indirgeme prensibinden yararlanır. Burada yöntem, iki adet izotropik çubuk ve kütleli rastgele değişkenliğe sahip sekiz tabakalı bir simetrik kompozit plakadan oluşan çizgisel bağlantılı bir güçlendirilmiş kompozit yapı ile test edilmiştir. Sunulan yaklaşımın doğruluğu ve başarısı sonlu elemanlar (SE) tabanlı Monte Carlo simülasyonları ve klasik İEA sonuçları ile ortaya konmuştur.

Mid and high frequency vibration analysis of line connected uncertain composite structures by using modal impedance based statistical energy analysis procedure

HIGHLIGHTS

- Modal impedance based statistical energy analysis for vibration analysis of line connected structures
- Dimension reducing principle for the determination of line impedances
- Mid and high frequency vibration analysis method that takes uncertainties into account for mid and high frequency region

Article Info

Research Article
Received: 06.11.2017
Accepted: 06.01.2018

DOI:

10.17341/gazimmfd.416532

Keywords:

Composite plate,
mid frequency,
high frequency,
uncertainty, line connection,
statistical energy analysis

ABSTRACT

In this study, mid and high frequency vibration analysis of line connected composite structures having structural uncertainty obtained by mass variability is performed by using a procedure of modal impedance based statistical energy analysis (SEA). The procedure proposed here calculates finite system impedances in terms of modal information for each subsystem and uses these impedances in the prediction of SEA parameters. Modal information is extracted from finite element method by providing approximate physical boundary condition similarity of each subsystem with entire system. The procedure, on the contrary of classical SEA, considers not only driving point infinite impedances but also transfer point finite impedances to represent the total energy of the finite system more realistically. The procedure utilizes a dimension reducing principle based on point impedances to obtain line connection impedances. It is tested for line connected stiffened plate consisting of two isotropic beams and an eight layered symmetrically laminated composite plate having random mass variability. Its accuracy and capacity are presented by the results of finite element method based Monte Carlo simulations and classical SEA.

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: abdullah.secgin@deu.edu.tr, kara.murat@deu.edu.tr, serkan.guler@iste.edu.tr /

Tel: +90 232 301 9273

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Günümüzde titreşim analizleri, mühendislik uygulamalarında oldukça önemli yer tutmaktadır. Titreşim analizleri, yalnızca otomotiv, gemi, havacılık ve inşaat sektöründeki büyük yapı için değil aynı zamanda belirtilen yapıları oluşturan yay, civata, çubuk, plaka vb. gibi elemanlar için de gerçekleştirilir [1-3]. Orta ve yüksek frekanslı titreşim analizleri, otomobil, gemi ve havacılık sektöründeki araştırma ve geliştirme çalışmalarında oldukça önem arz etmektedir. Bu tip analizlerde, sonlu elemanlar metodu (SEM) gibi deterministik teknikler bazı teorik ve sayısal kısıtlar nedeniyle güvenli değildirler [4]. Bunun yanında, aynı hattan aynı üretim teknikleri ile üretilen aynı ürünlerin farklı örneklemeleri, farklı vibro-akustik cevap karakterlerine sahip olabilmektedir [4]. Bu kontrol edilemeyen değişiklikler, vibro-akustikte “belirsizlik” olarak isimlendirilir. Belirsizlikler; geometri, malzeme özellikleri, zorlama karakteristiği, başlangıç ve sınır koşulları gibi parametrelerdeki küçük farklılıklardan kaynaklanmaktadır. Yapısal-akustik sistemlerdeki belirsizlikler, vibro-akustik cevabı özellikle orta ve yüksek frekanslarda güvenilir kılmaktadır. Bu nedenle, orta ve yüksek frekanslardaki analizlerde genellikle enerji tabanlı istatistiksel yaklaşımlar kullanılmaktadır.

Yüksek frekans titreşim analizlerinde enerji tabanlı yöntemler kullanılırken cevap parametreleri uzamsal ve frekans ortalamalı parametreler olarak hesaplanır. Burada yapılan ortalama alma işlemi, sistemlerin yerel bilgilerinin kaybolmasına ancak bunun yanında belirsizlikleri hesaba katabilmesine neden olmaktadır. Bu frekans bölgesinde en sık kullanılan yöntem, istatistiksel enerji analizidir (İEA) [5]. İEA esas olarak karmaşık bir sistemi, ortak modal davranış gösteren basit altsistemlere ayırır [5, 6]. Daha sonra her bir altsistemin enerji seviyesini belirlemek için altsistemler arasında güç dengesi kurulur. Klasik İEA birçok kabul ve kısıtlara sahip olduğundan, sistem cevabı hakkında oldukça sınırlı miktarda bilgi vermektedir [5]. Bu yöntemle rezonans davranış, sınır koşulu ve yerel sönüm etkisi gibi birçok parametrenin etkisi analizler sonucunda elde edilememektedir. Bu nedenle klasik İEA, rezonans davranışının cevap spektrumunda modların üst üste binmesinden dolayı düzgünleştiği fakat hala ayırt edilebildiği orta frekans bölgesinde tek başına uygulanabilir değildir. Bu bölge analizleri için, araştırmacılar enerji ve istatistiksel tabanlı yaklaşımları deterministik teknikler ile bir araya getiren melez yöntemler geliştirmeye devam etmektedirler [7-14].

Bu çalışma ile bahsedilen orta ve yüksek frekanslı melez yöntem araştırmalarına önemli bir katkı koyan modal empedans tabanlı İEA yordamı [15] çizgisel bağlantıya sahip sistemler için geliştirilmiştir. Bu yordam her bir altsistemin tüm sisteme göre yaklaşık fiziksel sınır koşulu benzerliğini sağlayabilmesi, yerel dinamik değişkenlerin enerji üzerindeki etkilerini hesaba katabilmesi, sadece zorlama noktası sonsuz empedansları değil, sonlu noktasal transfer empedanslarını da hesaba katabilmesi gibi özellikleri

sebebiyle özellikle orta frekans bölgelerinde oldukça başarılı sonuçlar vermiştir. Lyon ve DeJong [5]’a göre çizgisel bağlantılı yapıların analizinde çizgisel empedansların belirlenmesi gerekmektedir. Bu çalışmada, sonlu sistem çizgisel empedansları, noktasal empedanslar üzerinden bir boyut indirgeme prensibi ile elde edilmiştir. Yordam çizgisel bağlantıya sahip bir belirsiz kompozit plakanın orta ve yüksek frekans titreşim analizleri ile test edilmiştir. Yapısal belirsizlik, kaydırılmış (pozitif değerli) normal dağılıma göre sekiz simetrik katmanlı kompozit bir plaka üzerinde kütsel rastgelelik yaratılarak modellenmiştir. Doğrulama çalışması için sonlu elemanlar tabanlı Monte Carlo simülasyonu ve klasik İEA sonuçları kullanılmış ve yordamın başarısı açıkça ortaya konmuştur.

2. MODAL EMPEDANS TABANLI İSTATİSTİKSEL ENERJİ ANALİZİ (İEA) YORDAMI (THE PROCEDURE OF MODAL IMPEDANCE BASED STATISTICAL ENERGY ANALYSIS (SEA))

2.1. Yordamın Uygulama Adımları (Application Steps of the Procedure)

Çizgisel bağlı yapıların orta ve yüksek frekans analizlerinde, her bir sonlu sistemin çizgisel empedanslarının modal bilgiler yardımıyla belirlenmesi gerekmektedir. Bu çalışmada ortaya konulan yordam, yapının çizgisel empedanslarını da hesaba katarak şu şekilde uygulanır:

Karmaşık yapı, klasik İEA’nde olduğu gibi fiziksel altsistemlerine ayrılır. Çizgisel empedanslar, noktasal empedanslar kullanılarak boyut indirgeme prensibi ile elde edilebilir. Örneğin, bir plakanın çizgisel empedansı, aynı malzemeden yapılan ve aynı kalınlığa sahip bir çubuğun noktasal empedansı cinsinden Eş. 1’de görüldüğü gibi yazılabilir:

$$Z_{plaka}^{çizgi} = \frac{1}{L} Z_{çubuk}^{nokta} \quad (1)$$

Burada, L plakanın indirgenen boyutudur. Boyutu indirgenen her bir altsistem (ait olduğu bütün sisteme uygun (yaklaşık) sınır koşulları ile) tekil olarak modellenir. İndirgenen her bir altsistemin doğal frekansları ve bu frekanslara karşılık gelen titreşim biçimleri sonlu elemanlar metodu (SEM) ile elde edilir. Noktasal bağlı yapıların zorlama ($m=n$, m : zorlama noktası, n : m zorlama noktasına karşılık seçilen cevap noktası) ve transfer ($m \neq n$) empedanslarının uzamsal ortalaması $\langle Z_{mn} \rangle$ Eş. 2’de verilen mod süperpozisyon yöntemi ile hesaplanır [15]:

$$\frac{1}{\langle Z_{mn} \rangle} = \frac{1}{N_m N_n} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_n} \frac{v_{n,m}}{F_m} = \frac{j\omega}{N_m N_n} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_n} \left(\sum_{i=1}^p \frac{\{\phi_n\}_i \{\phi_m\}_i^T}{M_{n,n}^i (K_{n,n}^i - \omega^2 + j\omega C_{n,n}^i)} \right) \quad (2)$$

Burada, $\langle \cdot \rangle$ uzamsal ortalamayı ifade etmektedir. N_m ve N_n ise sırasıyla zorlama ve uzamsal cevap noktalarının sayısıdır. $M_{n,n}^i = \{\varphi_n\}_i^T m \{\varphi_n\}_i = 1$, $K_{n,n}^i = \{\varphi_n\}_i^T k \{\varphi_n\}_i = \omega_{d_i}^2$ ve $C_{n,n}^i = \{\varphi_n\}_i^T c \{\varphi_n\}_i = \eta \omega_{d_i}$ ise sırasıyla normalize edilen modal kütle, dirençlilik ve sönüm matrislerinin (n, n) elemanları, m , k ve c ise global kütle, dirençlilik ve sönüm matrisleridir. Ayrıca, P modal empedansa katkı veren mod sayısını, ω açısal zorlama frekansını, ω_n doğal frekansı, η yapısal sönümü ve φ_i ise i . titreşim biçimini göstermektedir. Bu çalışmada $\langle Z_{mn} \rangle$ “özgün empedans” olarak adlandırılmıştır. Özgün empedans kavramı ile bir altsistemin, sonlu, frekansa bağlı, noktasal/çizgisel zorlama empedansı ve noktasal/çizgisel transfer empedanslarının uzamsal olarak ortalaması alınmış empedans ifade edilmektedir.

Boyutu indirgenen altsistemin çizgisel empedansı, bir önceki adımda boyutu indirgenerek elde edilen yapının noktasal empedansına eşittir (Örneğin; bir plakanın çizgisel empedansı, plakanın boyutunun indirgenmesi ile elde edilen bir çubuğun noktasal empedansı olarak modellenir.) Hesaplanan çizgisel özgün empedanslar önemli bir İEA parametresi olan bağlantı kayıp faktörünün hesaplanmasında kullanılır. Bu şekilde her bir altsistem için elde edilen özgün empedanslar İEA denklemlerine yerleştirilerek çözülür ve sistemin titreşim cevabı elde edilir. Noktasal bağlantılı sistem için yordamın uygulanmasına yönelik ayrıntılar referans [12]’de bulunabilir.

2.2. İEA Parametrelerinin Hesaplanması (Computation of SEA parameters)

Bu bölümde, İEA ile ilgili kısa bir bilgilendirme yapılması uygun olacaktır. İEA karmaşık bir yapıyı alt modal ve fiziksel altsistemlerine ayırarak, bu altsistemler arasında güç dengesi kurar. Bağlantılı altsistemler arasındaki ortalama güç geçişi, altsistemlerin ortalama modal enerjileri arasındaki fark ile orantılıdır. S adet altsistemden oluşan bir sistemde i . altsistemin güç dengesi Eş. 3 veya Eş. 4 şeklinde yazılabilir [5]:

$$\langle \overline{P_{diss,i}} \rangle + \sum_{j=1, \neq i}^S (\langle \overline{P_{ij}} \rangle - \langle \overline{P_{ji}} \rangle) = \langle \overline{P_{in,i}} \rangle, \quad (3)$$

$$\omega \eta_{ii} \langle \overline{E_i} \rangle + \sum_{j=1, \neq i}^S \omega (\eta_{ij} \langle \overline{E_i} \rangle - \eta_{ji} \langle \overline{E_j} \rangle) = \langle \overline{P_{in,i}} \rangle. \quad (4)$$

Burada E_i , altsistemin ortalama enerji seviyesini; üst çizgi, frekans ortalamasını; P_{in} , altsisteme verilen gücü; η_{ii} , sönüm kayıp faktörünü; η_{ij} , i . altsistem ile j . altsistem arasındaki bağlantı kayıp faktörünü göstermektedir. Ayrıca $\eta_{ij} \neq \eta_{ji}$ olduğu unutulmamalıdır.

2.2.1. Bağlantı kayıp faktörü (BKF) (Coupling loss factor (CLF))

Bağlantı kayıp faktörü (BKF)’nün hesaplanması yapıların birbirine bağlanma tipine (noktasal, çizgisel, alansal) göre değişmektedir. Noktasal bağlantılar için, BKF’nin hesabı

normal geliş açısındaki iletim katsayısı ile ilişkili iken, çizgisel bağlantılarda ise dalganın bağlantı noktasına geliş açısı önem kazanmaktadır. Noktasal ve çizgisel bağlantılar için BKF sırasıyla Eş. 5 ve Eş. 6 ile hesaplanabilir [5]:

$$\eta_{ij}^{nokta} = \frac{\overline{\delta f_i}}{\pi f} \beta_{corr} \frac{\tau_{ij}(0)}{2 - \tau_{ij}(0)}, \quad (5)$$

$$\eta_{ij}^{çizgi}(\theta) = \frac{\overline{\delta f_i}}{\pi f} \beta_{corr} \frac{k_i L_c \cos(\theta)}{2} \frac{\tau_{ij}(\theta)}{2 - \tau_{ij}(\theta)}. \quad (6)$$

Burada $\tau_{ij}(0)$ ve $\tau_{ij}(\theta)$ sırasıyla dalganın normal ve açısal geliş durumundaki iletim katsayısını göstermektedir. $\overline{\delta f_i}$ incelenen frekans bandındaki modlar arasındaki ortalama uzaklık, k_i i . altsistemin dalga sayısı, L_c bağlantı boyu ve β_{corr} ise modal düzeltme faktörüdür. Modal düzeltme faktörü Eş. 7 ile belirlenebilir [5].

$$\beta_{corr} = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{1}{2\pi(\beta_{i,net} + \beta_{j,net})}\right)^8\right)^{1/4}}. \quad (7)$$

Burada, $\beta_{i,net} = f \eta_{i,net} / \overline{\delta f_i}$ ($\eta_{i,net}$: toplam kayıp faktörü) toplam modal faktördür. Eş. 6’da görüldüğü gibi BKF, frekans ve dalganın geliş açısına (θ) bağlıdır ve geliş açısı üzerinden ortalama alınarak elde edilebilir [5]:

$$\langle \eta_{ij} \rangle_\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \eta_{ij}(\theta) d\theta. \quad (8)$$

Burada, $\langle \cdot \rangle_\theta$ geliş açısı uzamsal ortalamasını göstermektedir. Eş. 5 ve 6’da görüldüğü gibi, iletim katsayısı dalganın bağlantı noktasına paralel ($\theta=0^\circ$) veya belirli bir açıyla gelmesi durumu için hesaplanmalıdır. Yüksek frekanslarda, normal geliş açısındaki iletim katsayısı Eş. 9 ile belirlenebilir [5]:

$$\tau_{ij}(0) = \frac{4 \cdot R_{i\infty} \cdot R_{j\infty}}{\left| \sum_{k=1}^m Z_{k\infty} \right|^2} \quad (9)$$

Burada, $Z_{k\infty}$ birbirine bağlanan altsistemlerin sonsuz empedansı, $R_{i\infty}$ ise i . altsistemin sonsuz empedansının reel kısmıdır. Açığa bağlı iletim katsayısı ise Eş. 9’da kullanılan empedansların $\cos(\theta)$ ile çarpılması ile elde edilebilir. Farklı geliş açılarındaki iletim katsayısının belirlenmesinin ardından, Eş. 6 ile açısal iletim katsayısı hesaplanabilir. Fakat burada, dalganın iletildiği altsistemdeki yayılım açısı Eş. 10’da verilen Snell kanunu ile belirlenir:

$$\frac{c_i}{c_j} = \frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_j)}. \quad (10)$$

Burada, c dalga hızını, θ ise dalganın yayınım açısını göstermektedir.

2.2.2. Ortalama modal uzaklık (OMU) (Average modal spacing (AMS))

Ortalama modal uzaklık (OMU), bir altsistemin doğal frekansları arasındaki ortalama mesafeyi gösterir [5] ve Eş. 5 ve 6'da görüldüğü gibi BKF'nün hesaplanmasında bilinmesi gereken parametrelerden biridir. OMU, bir çubuk ve plakanın eğilme modları göz önüne alındığında sırasıyla Eş. 11 ve 12 ile hesaplanabilir [5,15]:

$$\overline{\delta f_i} = \frac{1}{L_b} \sqrt{2\pi f \kappa c_L'} \quad (11)$$

$$\overline{\delta f_i} = 2\kappa c_L' / A_p \quad (12)$$

Burada, L_b çubuğun uzunluğu, κ atalet yarıçapı (düzgün kalınlığa (h_p) sahip bir plaka ve çubuk için $\kappa = h_p / \sqrt{12}$), A_p plakanın yüzey alanı ve c_L' aksel dalga hızıdır. Aksel dalga hızı, elastisite modülü E_y , yoğunluk ρ ve Poisson oranı μ cinsinden $c_L' = \sqrt{E_y / \rho (1 - \mu^2)}$ şeklinde hesaplanır. Kompozit plakalar için efektif aksel dalga hızı, x ve y asal eksenlerindeki aksel dalga hızı cinsinden Eş. 13 ile belirlenir [16]:

$$c_L' = \sqrt{c_{Lx}' \cdot c_{Ly}'} \quad (13)$$

2.2.3. Güç girdisi (Power input)

Eş. 3'te görüldüğü gibi İEA ile doğru bir analiz yapabilmek için altsistemleri tahrik eden güç girdisinin belirlenmesi gerekir. Bir altsistemin güç girdisi Eş. 14 ile belirlenebilir [5]:

$$\langle \overline{P_{in}} \rangle = \langle \overline{Fv} \rangle = \langle F^2 \rangle \text{Re} \left\{ \frac{1}{\langle Z_0 \rangle} \right\} \quad (14)$$

Burada, $\text{Re} \{ \}$ karmaşık fonksiyonun gerçel kısmı ve F sabit spektral genliğe sahip zorlama kuvvetidir.

3. GÜÇLENDİRİLMİŞ KOMPOZİT PLAKANIN TİTREŞİM ANALİZİ (VIBRATION ANALYSIS OF STIFFENED COMPOSITE PLATE)

3.1. Güçlendirilmiş Plakanın Özellikleri (Properties of Stiffened Plate)

Bu çalışmada, iki alüminyum çubuğun sekiz katmanlı simetrik kompozit bir plakaya çizgisel olarak bağlanması ile oluşturulmuş "güçlendirilmiş plaka"nın titreşim analizi yapılmıştır (Şekil 1). Şekil 1a'da görüldüğü gibi izotropik çubuklar kompozit plakaya asimmetrik ve çizgisel olarak bağlanmıştır. Şekilde görüldüğü gibi kompozit plaka ve çubuklar sırasıyla altsistem 1, 2 ve 3 olarak isimlendirilmiştir. Kompozit plaka, toplamda 2,2 mm kalınlığa sahip olup, katmanları {0-90-0-90-90-0-90-0}

açışal oryantasyonu ile sıralıdır. Çubuklar ise 3,5 mm x 25 mm kesit alanına sahiptir. Analizi gerçekleştirilen yapının mekanik özellikleri Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1. Altsistemlerin mekanik özellikleri
(Mechanical properties of subsystems)

Özellik	Kompozit Plaka	Çubuklar
Yoğunluk [kg / m^3]	1771,21	2700
Elastisite modülü [GPa]	x:21,30 y:21,10	70
Poisson oranı	xy:0,161	0,33
Sönüm oranı	0,0286	0,0198

Bu çalışmada, Şekil 1'de görülen yapının titreşim frekans cevap analizi üç farklı yöntem ile gerçekleştirilmiştir; a) sonlu elemanlar yöntemi, b) klasik İEA, c) modal empedans tabanlı İEA. Yapının frekans cevap analizi kompozit plakanın farklı noktalarından 1 N'luk kuvvet ile zorlanması durumu için gerçekleştirilmiştir.

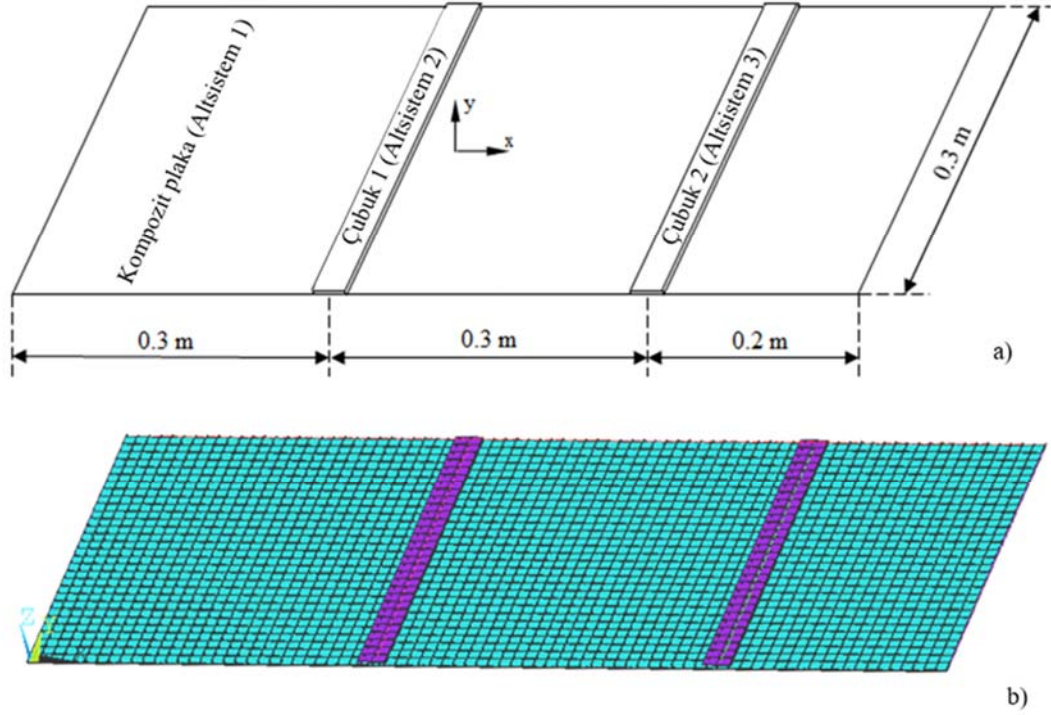
3.2. Belirsizlik Simülasyonu ve Sonlu Elemanlar Modeli (Simulation of Uncertainty and Finite Element Modelling)

Sonlu elemanlar modelinde belirsizlik, konumu ve niceliği kaydırılmış pozitif değerli normal dağılıma göre değiştirilen küçük topaklanmış kütlelerin kompozit plaka üzerine yerleştirilmesi ile modellenmiştir. Plaka üzerine yerleştirilen kütle dağılımı ile toplam kütle (plaka+topaklanmış kütleler) $N_p(m_m; \sigma) = N_p(0,96; \pm 0,01)$ kg normal dağılımı ile belirlenmiştir. Burada, m_m ortalama kütle, σ ise kütlelerin standart sapma değerini göstermektedir. Toplamda plaka üzerinde 50 farklı konumda yerleştirilen birbirine Eş 20 adet topaklanmış kütle ile 50 adet örneklem üretilmiştir. Şekil 1b'de güçlendirilmiş plakanın sonlu elemanlar modeli sunulmuştur. Başarılı bir sonlu eleman modeli için her bir sonlu elemanın boyu, incelenen frekans aralığındaki (1-2000 Hz) minimum dalga boyunun dörtte birinden küçük olmalıdır. Bu nedenle, plakanın SEM modelinde 80x30 kabuk eleman, çubuklarda ise 30 adet tek eksenli çubuk sonlu elemanı kullanılmıştır.

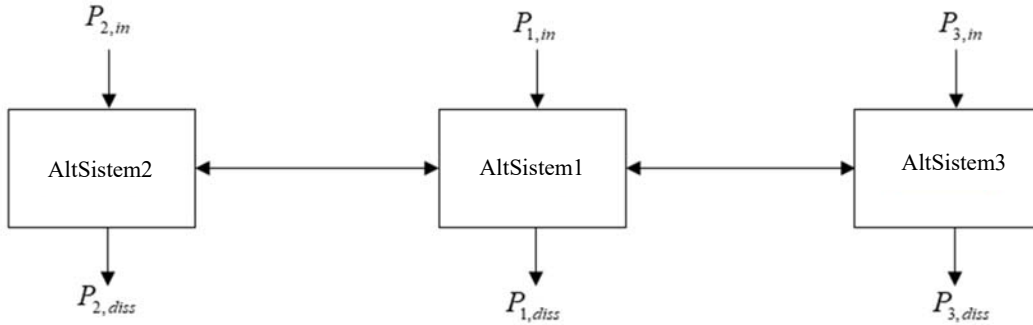
3.3. Klasik İstatistiksel Enerji Analizi Modeli (Classical Statistical Energy Analysis Modelling)

Şekil 1a'da görüldüğü gibi kompozit plaka ve çubuklar sırasıyla altsistem 1, 2 ve 3 olarak numaralandırılmıştır. Şekil 1'de görülen yapının İEA modeli Şekil 2'de sunulmuştur. Birbirine bağlı her bir altsistem için Eş. 4'te verilen güç dengesi yazılırsa, güçlendirilmiş plaka için Eş. 15'te verilen denklem takımı elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \eta_{11} + \eta_{12} + \eta_{13} & -\eta_{21} & -\eta_{31} \\ -\eta_{12} & \eta_{21} + \eta_{22} & 0 \\ -\eta_{13} & 0 & \eta_{31} + \eta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle \overline{E_1} \rangle \\ \langle \overline{E_2} \rangle \\ \langle \overline{E_3} \rangle \end{Bmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{Bmatrix} \langle \overline{P_{1,in}} \rangle \\ \langle \overline{P_{2,in}} \rangle \\ \langle \overline{P_{3,in}} \rangle \end{Bmatrix} \quad (15)$$



Şekil 1. Çizgisel bağlı güçlendirilmiş plaka a) Şematik gösterim b) Sonlu elemanlar modeli
(Line connected stiffened plate (a) Schematic representation (b) Finite element model of the plate)



Şekil 2. Güçlendirilmiş plakanın istatistiksel enerji analizi modeli (Statistical energy analysis model of the stiffened plate)

Eş. 15'te verilen denklem takımı çözülerek her bir altsistemin enerjisi ve dolayısıyla titreşim hızı belirlenir.

3.4. Yüksek Frekans Eşiğinin Belirlenmesi (Determination of High Frequency Threshold)

Modların üst üste binme faktörü (MBF), modal bant genişliğindeki mod sayısını istatistiksel olarak gösteren bir parametredir ve yapıların yüksek frekanslarda titreşip titreşmediğini gösteren önemli bir göstergedir. Matematiksel olarak Eş. 16 ile hesaplanır:

$$MBF = \frac{\pi f \eta}{2 \delta f} \quad (16)$$

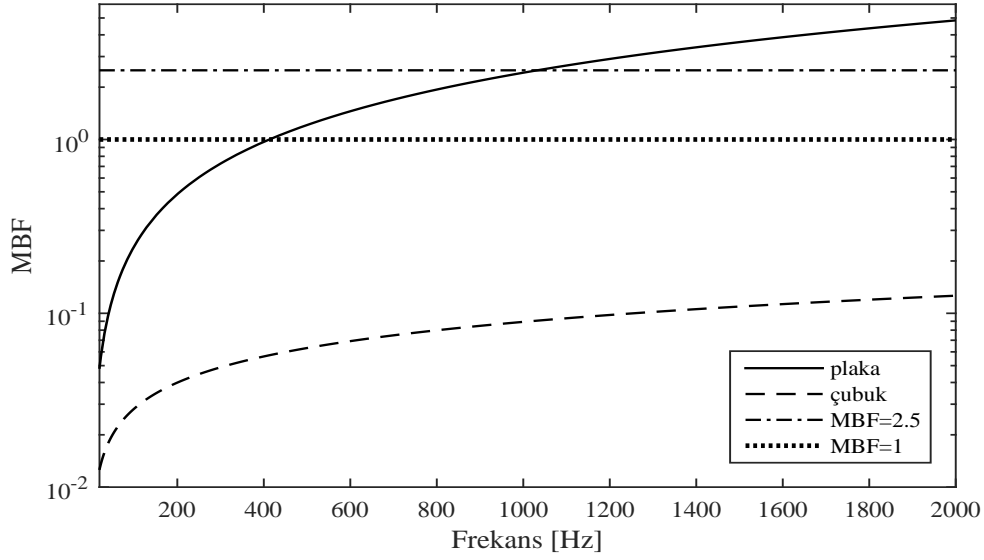
Burada η altsistemin sönüm kayıp faktörüdür (SKF). Rabbiolo vd. [17] çubuk, plaka ve akustik hacim için

yaklaşık bir MBF eşiği belirlemiştir (sırasıyla MBF=1, 2,5 ve 3).

Şekil 3'te 1-2000 Hz aralığında altsistemlerin Eş. 16'dan hesaplanan MBF değerleri verilmiştir. Şekil 3'te görüldüğü gibi plaka 1030 Hz civarında yüksek frekans bölgesine geçmektedir. Bununla birlikte, çubuklar için hesaplanan MBF ise incelenen frekans aralığında yüksek frekans eşiğine ulaşmamaktadır. Dolayısıyla tüm sistem (güçlendirilmiş plaka) için yüksek frekans sınırı 1030 Hz olarak kabul edilebilir.

3.5. Belirsiz Güçlendirilmiş Plakanın Sayısal Analizi (Numerical Analysis of Uncertain Stiffened Plate)

Bölüm 2.1'de belirtilen modal empedans tabanlı İEA ile analiz yapabilmek adına ilk olarak yapının analizi için



Şekil 3. Altsistemlerin modların üst üste binme faktörü (Modal overlap factor of the subsystems)

gerekli olan modal empedansların belirlenmesi gerekmektedir. Buna göre;

- Yapı, noktasal kuvvet ile zorlanacağından, uyarılan altsistemin güç girdisinin belirlenmesi için gerekli olan noktasal zorlama empedanslarının Eş. 2 ile belirlenmesi gerekmektedir. Bu çalışmada, 1 nolu altsistemin zorlanması durumunda sistem cevabı araştırılmaktadır.
- Şekil 1’de görülen yapıda çubuklar ve plaka birbirlerine çizgisel olarak bağlandığından bu altsistemlerin çizgisel empedanslarının belirlenmesi gerekmektedir.

Bu çalışmada gerçekleştirilen tüm sonlu elemanlar analizleri, ANSYS APDL 15.0 programında Intel Xeon E5-2643 2x3.3 GHz, 96 GB Ram, 64 Bit Win 7 iş istasyonu ile yapılmıştır.

3.5.1. Empedansların belirlenmesi (Determination of impedances)

Plakanın noktasal zorlama empedansı (Driving point impedance of the plate)

Bölüm 2.1’de belirtildiği gibi plakanın noktasal zorlama empedansı belirlenirken plakanın modal analizi uygun sınır koşulları altında gerçekleştirilmelidir. Çubukların kompozit plakaya göre çok daha fazla rijit olmasından dolayı, plaka, çubukların güçlendirilmiş plakaya bağlı olduğu her iki hat boyunca (Şekil 1a’da $x=0,3 m$ ve $x=0,6 m$) çizgisel olarak sabitlenmiştir. Daha sonra belirlenen bu yaklaşık sınır koşulları altında sayısal modal analiz ile plakanın doğal frekansları ve bunlara karşılık gelen titreşim biçimleri elde edilmiştir. Kompozit plakanın noktasal zorlama empedansı, elde edilen bu doğal frekanslar ve titreşim biçimleri ve Eş. 2 ($m=n$ durumu için) ile hesaplanmıştır. Uzamsal rastgelelik zorlamasını (rain on the roof excitation) temsil edebilmek amacıyla $N_m=10$ olarak seçilmiştir. Bu seçilen 10 zorlama noktasına ait noktasal empedanslar ve bunların aritmetik

ortalamaları, sonsuz plakanın analitik empedansı ile Şekil 4’te karşılaştırılmıştır. Çubuk ve plaka için sonsuz noktasal empedanslar sırasıyla Eş. 17 ve 18 ile hesaplanır [5]:

$$Z_{\infty} = 2\rho S_b c_B (1 + j) , \quad (17)$$

$$Z_{\infty} = 8\rho h_p \kappa c_L . \quad (18)$$

Burada, S_b çubuğun kesit alanı ve $c_B = \sqrt{2\pi f \kappa c_L}$ eğilme dalgalarının yayılım hızıdır.

Şekil 4’te görüldüğü gibi, plakanın aritmetik ortalamalı noktasal zorlama empedansı, analitik empedansı ile özellikle yüksek frekanslarda uyumludur. Bu durum, Eş. 2 ile hesaplanan empedansların İEA’nde özellikle yüksek frekans bölgesinde güvenle kullanılabilirliğini göstermektedir. Bunun yanında, hesaplanan ortalama empedans, plaka hakkında modal bilgiyi korumakta ve orta frekans bölgeleri için de enerji değişiminin modellenebileceğini ispat etmektedir.

Altsistemlerin çizgisel empedansları (Line impedances of subsystems)

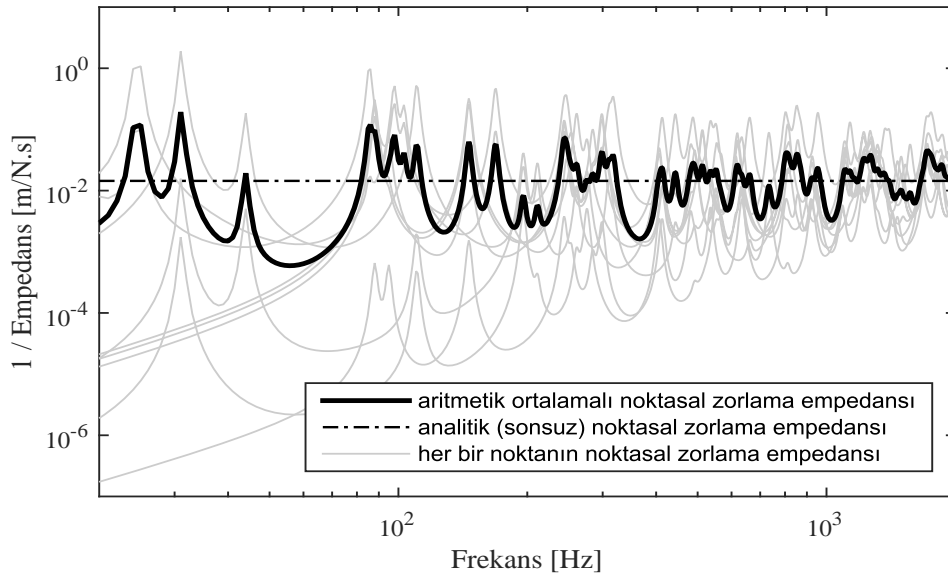
Bölüm 2.1’de belirtildiği gibi, altsistemlerin çizgisel empedansları, boyut azaltma prensibinin kullanılması ile hesaplanabilir. Plakanın çizgisel empedansı aşağıdaki işlem adımları ile hesaplanabilir: Kompozit plaka, çizgisel bağlantı uzunluğuna (0,3 m) sahip ve aynı mekanik özelliklere sahip olacak şekilde bir kompozit çubuğa indirgenir. İndirgenen plaka bu adımdan sonra *i-çubuk* olarak isimlendirilecektir. Daha sonra, *i-çubuk*’un sonlu elemanlar yöntemi ile modal analizi gerçekleştirilerek modal parametreleri elde edilir. *i-çubuk* üzerinde rastgele seçilen bir düğüm zorlama noktası olarak, diğer tüm düğümler ise transfer noktası olarak seçilir. Eş. 2 yardımıyla yapının noktasal empedansları hesaplanır. Bu işlem uzamsal rastgele zorlamayı temsil edebilmek

amacıyla 10 farklı zorlama noktası ($N_m=10$) için tekrarlanır. Noktasal empedanslar hesaplanırken zorlama noktası empedansı ve özgün empedans (aritmetik ortalamaları alınmış zorlama ve transfer noktasal empedanslarının uzamsal ortalaması) ayrı ayrı hesaplanmıştır. Şekil 5'te kompozit plakanın çizgisel zorlama empedansı ve özgün empedansı sunulmuştur. Beklendiği gibi özgün empedans daha düşük enerji seviyesine sahiptir. Benzer şekilde, çubuğun çizgisel empedansı boyut indirgeme prensibi ile noktasal empedanslar yardımıyla hesaplanabilir. Hesaplanan çizgisel empedans, Şekil 6'da sonsuz sistem empedansı ile karşılaştırılmıştır. Çizgisel bağlantıya sahip bir çubuk toplanmış bir kütle gibi davranacağından, bu yapı için

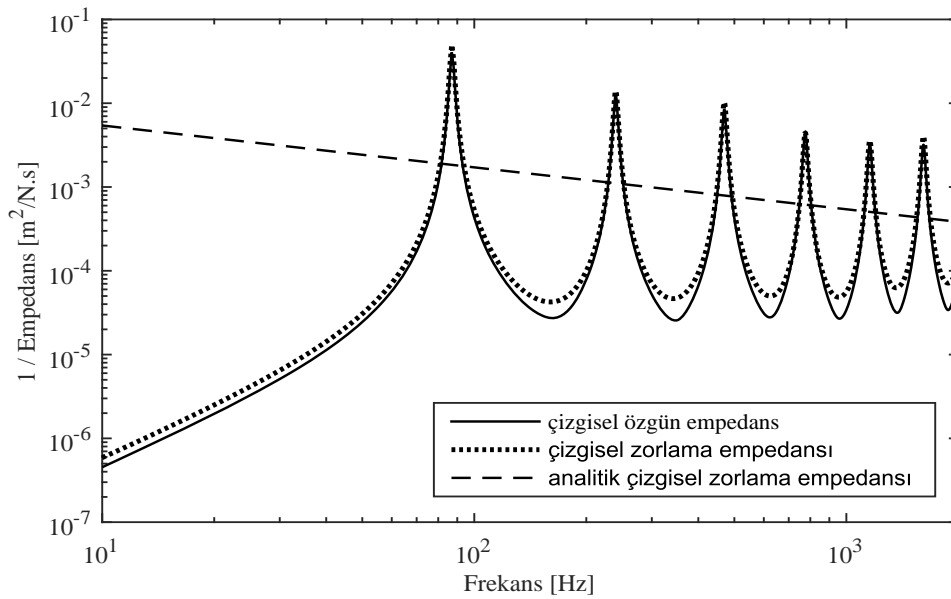
transfer empedans bulunmamaktadır. Şekil 5 ve 6, elde edilen özgün empedansların beklendiği gibi frekans yükseldikçe analitik empedanslara yakınsadığını açıkça göstermiştir. Böylelikle yordamın özellikle orta ve yüksek frekanslarda oldukça doğru sonuçlar verebileceğini temin etmektedir.

3.5.2. Belirsiz "güçlendirilmiş plaka"nın frekans cevap analizi (Frequency response analysis of uncertain stiffened plate)

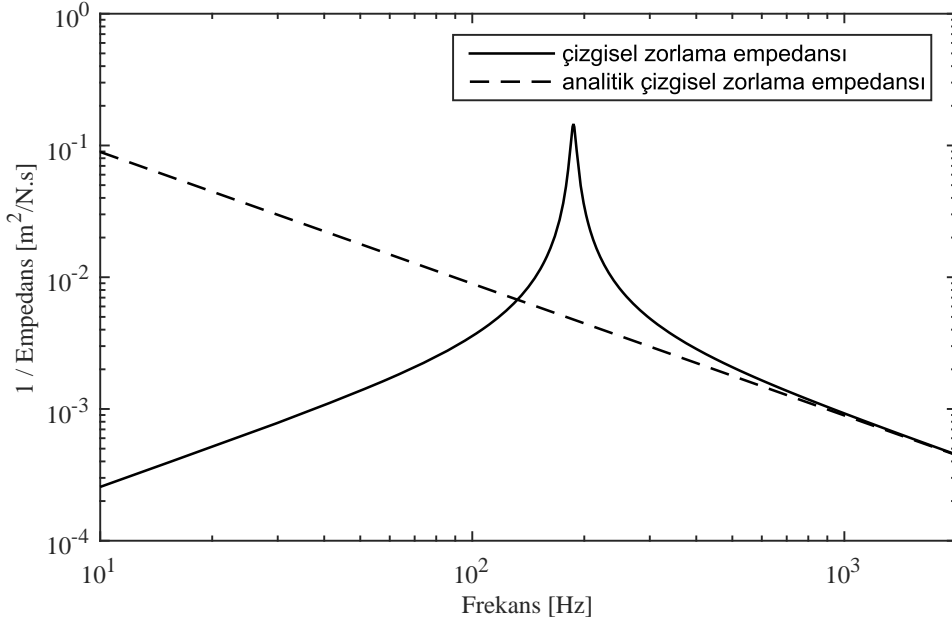
Bu bölümde, sunulan modal empedans tabanlı İEA ile titreşim hızlarının frekans cevap analizi gerçekleştirilmiş ve sonlu elemanlar-Monte Carlo simülasyonu ve klasik İEA



Şekil 4. Kompozit plakanın noktasal zorlama empedansları (Ten driving point force impedances of the composite plate)



Şekil 5. Plakanın çizgisel empedansları (Line impedances of the plate)



Şekil 6. Çubuğun çizgisel empedansları (Line impedances of the beam)

sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Kütle değişkenliğinin frekans cevabının üzerindeki etkisini gözlemlemek amacıyla, kompozit plaka her bir kütle örnekleme için ayrı ayrı 10 farklı noktadan 1 N'luk kuvvet ile zorlanmıştır. Cevap analizlerinde yalnızca eğilme titreşimleri incelenmiştir ve sınır koşulu olarak serbest sınır koşu seçilmiştir. Kompozit plakanın uzamsal ortalama cevabını gözlemlemek amacıyla plakaya ait 100 adet düğüm noktası hesaba katılırken, çubuklar için çubuklara ait tüm düğümler dâhil edilmiştir. Şekil 7'de bahsedilen yöntemlerle elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

Yapılan analizlerden şu sonuçlar çıkarılabilir:

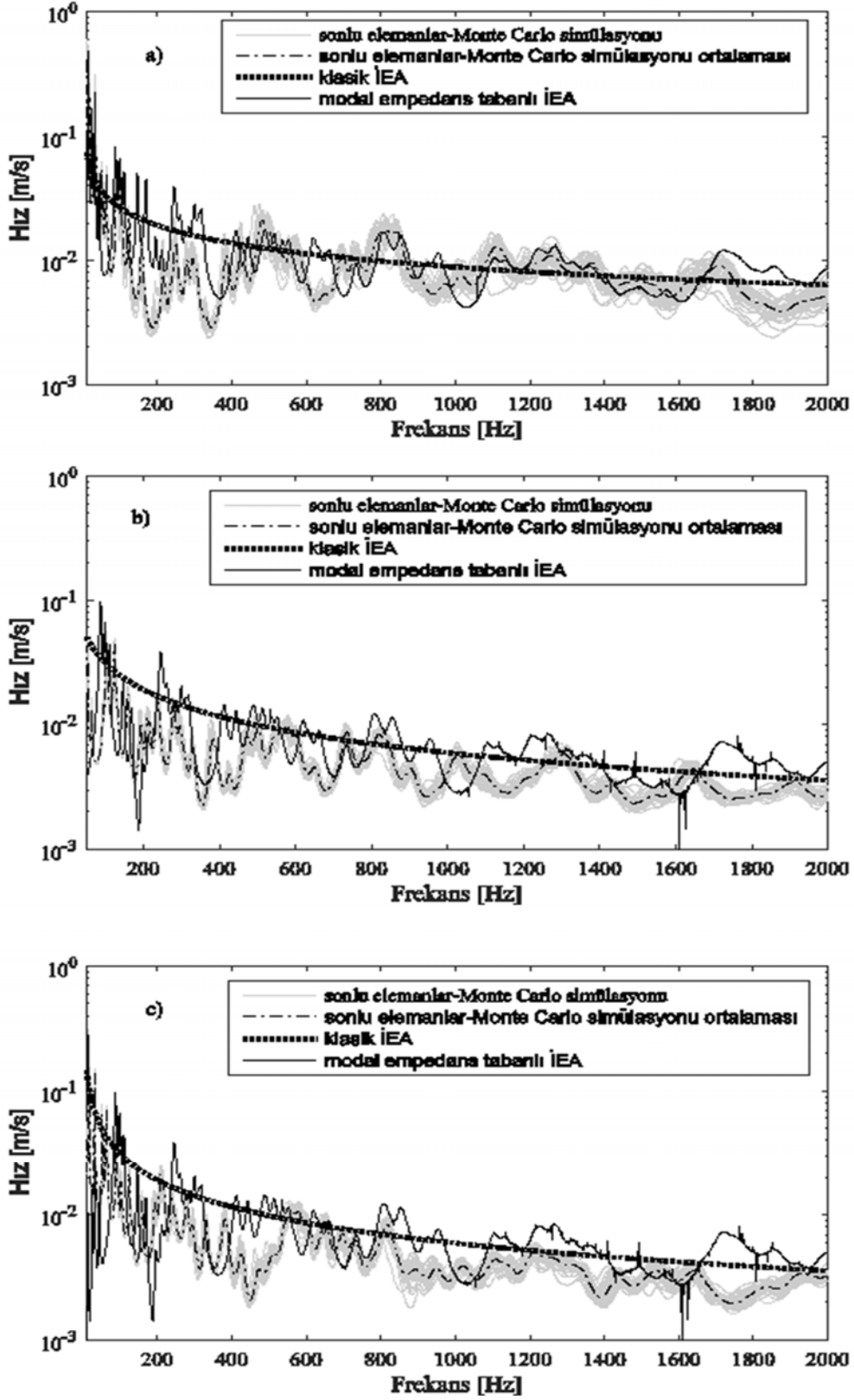
- Sonlu elemanlar tabanlı Monte Carlo simülasyonu oldukça fazla hesaplama süreleri ve büyük hafıza kullanımı gerektirmektedir. Bu durum, bu simülasyonu özellikle daha karmaşık yapılarda verimsiz kılmaktadır. Bu çalışmadaki güçlendirilmiş plaka için Monte Carlo simülasyonu ile her bir analiz yaklaşık olarak 0,34 saatlik sürede gerçekleştirilmiştir. Uzamsal rastgele zorlama göz önüne alındığında 10 zorlama noktası için analizler toplam 3,4 saat sürede tamamlanmıştır. 50 farklı kütle belirsizlik örnekleme için ise bu süre 7,08 gün'e ulaşmıştır. Bu çözüm süreleri sunulan yöntem ve klasik İEA ile karşılaştırılmayacak derecede yüksektir.
- Modal empedans tabanlı İEA ile yapılan hesaplamalar, beklendiği gibi yüksek frekans eşiği olan 1030 Hz üzerinde klasik İEA ile oldukça uyumlu sonuçlar vermiştir.
- Altsistemlerin, özellikle kompozit plakanın, sunulan yöntem ile elde edilen orta ve yüksek frekanslardaki cevapları ve sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen modal davranışı birbirine yakınsamaktadır. Fakat düşük

frekanslarda sunulan metodoloji sonlu elemanlar yöntemi ile uyumlu sonuçlar vermemektedir. Bu durum ise sunulan yordamın İEA mimarisini kullanmasından dolayı İEA'nin bazı ön kabul ve yetenek sınırlamalarının mirasıdır.

- Bununla birlikte sunulan yordam modal davranışı ve sınır koşullarını hesaba katabilme gibi yeteneklerinden dolayı orta ve yüksek frekanslardaki belirsizlikleri modelleyebilmekte ve bu frekanslarda oldukça başarılı sonuçlar verebilmektedir.
- Sunulan yordam tek bir sonlu elemanlar analizi ile yapılan modal analiz sonuçlarını kullandığından çok fazla hesaplama süreleri gerektirmemektedir.

4. SİMGELER (SYMBOLS)

A_p	: Plakanın yüzey alanı
BKF	: Bağlantı kayıp faktörü
c	: Global sönüm matrisi
c_i	: Dalga hızı
c_B	: Eğilme dalgalarının yayınım hızı
c'_L	: Eksenel dalga yayınım hızı
$C_{n,n}^i$: Normalize sönüm matrisinin (n, n) elemanı
E_y	: Elastisite modülü
E_i	: i . altsistemin altsistemin ortalama enerji seviyesi
İEA	: İstatistiksel enerji analizi
F	: Sabit spektral genlikli zorlama kuvveti
L	: Plakanın azaltılan boyu
L_b	: Çubuğun uzunluğu
L_c	: Bağlantı boyu
k	: Global direngenlik matrisi
k_i	: i . altsistemin dalga sayısı
$K_{n,n}^i$: Normalize direngenlik matrisinin (n, n) elemanı



Şekil 7. Altsistemlerin titreşim hız cevapları a) Altsistem 1 b) Altsistem 2 c) Altsistem 3
(Vibration velocity responses of subsystems a) Subsystem 1 b) Subsystem 2 c) Subsystem 3)

m	: Global kütle matrisi
m_m	: Belirsiz kütle miktarının ortalaması
$M_{n,n}^i$: Normalize modal kütle matrisinin (n, n) elemanı
MOF	: Modların üst üste binme faktörü
N_n	: Uzamsal cevap noktalarının sayısı
N_m	: Uzamsal zorlama noktası sayısı
P	: Hesaba katılan mod sayısı
P_{in}	: Altsisteme verilen gücü
R_{isc}	: i . altsistemin sonsuz empedansının reel kısmı
$Re\{ \}$: Karmaşık bir sayının reel kısmı
S	: Birbirine bağlı altsistem sayısı
Z	: Sonlu sistem empedansı
Z_∞	: Sonsuz sistem empedansı
$-$: Frekans ortalaması
$\langle \rangle$: Uzamsal ortalama
$\langle \rangle_\theta$: Geliş açısı ortalaması
β_{corr}	: Modal düzeltme faktörü
θ	: Dalganın bağlantı noktasına geliş açısı
$\eta_{i,net}$: Toplam kayıp faktörü
η_{ii}	: i . altsistemin sönüm kayıp faktörü
η_{ij}	: i . altsistem ile j . altsistem arasındaki BKF
τ_{ij}	: i . ile j . altsistem arasındaki iletim katsayısı
$\overline{\delta f_i}$: i . altsistemin frekans ortalamalı modal uzaklığı
σ	: Belirsiz kütlelerin standart sapması
κ	: Atalet yarıçapı
ρ	: Yoğunluk
μ	: Poisson oranı
ω	: Zorlama frekansı
ω_n	: Doğal frekans
ϕ_i	: i . modal vektörü

5. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Bu çalışmada, çizgisel bağlantıya sahip yapılar için bir modal empedans tabanlı İstatistiksel Enerji Analizi (İEA) yordamı geliştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar, istatistiksel ve sayısal analiz teknikleri ile karşılaştırılmıştır. Test sistemi olarak çizgisel bağlantılara sahip güçlendirilmiş bir kompozit plaka seçilmiştir. Çizgisel bağlantılı yapıların İEA’nde çizgisel empedansların kullanılması gerektiğinden, sonlu altsistemlerin empedansları için bir boyut indirgeme prensibi kullanılmıştır. Sunulan yordam İEA mimarisini kullandığından, çeşitli kısıtlara sahip olsa da belirsiz sistemlerin analizini bir simülasyona ihtiyaç duymadan gerçekleştirebilmektedir. Tüm sistem, farklı geometrik altsistemlere ayrılarak, geometrik karmaşıklıklar ve sınır koşulları yaklaşık olarak modellenilebilmiştir. Özgün empedans olarak tarif edilen ortalama çizgisel zorlama ve transfer empedanslarının hesaba katılması ile sistemin enerji içeriği daha gerçekçi olarak elde edilebilmiştir. Sonuçlar, sunulan yordamın orta ve yüksek frekans bölgesinde titreşim cevaplarını son derece güvenilir olarak elde edebildiğini göstermektedir. Sonuç olarak sunulan yordamın, klasik İEA ve sonlu elemanlar yönteminin üstünlüklerini birarada

kullanabilen bir melez yöntem olarak, çizgisel bağlantıya sahip sistemler için de başarılı olduğu ortaya konulmuştur.

TEŞEKKÜR (ACKNOWLEDGEMENT)

Bu çalışma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu, TÜBİTAK tarafından 112M836 No’lu proje numarası ile desteklenmiştir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Beyen K., Damage Simulation by Finite Element Updating Using Vibration Characteristics, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 32 (2), 403-415, 2017. doi:10.17341/gummfd.27599
2. Demir Ç., Akgöz B., Erdiñ M.C., Mercan K., Cıvlek Ö., Free Vibration Analysis of Graphene Sheets on Elastic Matrix, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 32 (2), 551-562, 2017. doi:10.17341/gummfd.26767
3. Kara, Y., Akbulut, H., Mechanical Behavior of Helical Springs Made of Carbon Nanotube Additive Epoxy Composite Reinforced with Carbon Fiber, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 32 (2), 417-427, 2017. doi:10.17341/gummfd.60834
4. Fahy F.J., Statistical Energy Analysis: A Critical Overview, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Physical and Engineering Sciences, 346, 431-447, 1994. doi:10.1098/rsta.1994.0027
5. Lyon R.H. ve DeJong, R.G., Theory and Application of Statistical Energy Analysis, Butterworth-Heinemann, 1995.
6. Díaz-Cereceda C., Poblet-Puig J., Rodríguez-Ferran A., Automatic Subsystem Identification in Statistical Energy Analysis, Mechanical Systems and Signal Processing, 54-55, 182-194, 2015. doi: 10.1016/j.ymssp.2014.09.003
7. Langley R.S., Bremner P., A Hybrid Method for the Vibration Analysis of Complex Structural-acoustic Systems, The Journal of the Acoustical Society of America, 105, 1657-1671, 1999. doi:10.1121/1.426705
8. Vlahopoulos N., Zhao X., An Investigation of Power Flow in the Mid-frequency Range for Systems of Co-linear Beams Based on a Hybrid Finite Element Formulation, Journal of Sound Vibration, 242, 445-473, 2001. doi:10.1006/JSVI.2000.3374
9. Shorter P.J., Langley R.S., Vibro-acoustic Analysis of Complex Systems, Journal of Sound Vibration, 288, 669-699, 2005. doi: 10.1016/j.jsv.2005.07.010
10. Ji L., Mace B.R., Pinnington R.J., A Mode-based Approach for the Mid-frequency Vibration Analysis of Coupled Long- and Short-wavelength Structures, Journal of Sound and Vibration, 289, 148-170, 2006. doi: 10.1016/j.jsv.2005.02.003
11. Cotoni V., Shorter P., Langley R., Numerical and Experimental Validation of a Hybrid Finite Element-Statistical Energy Analysis Method, The Journal of the

- Acoustical Society of America, 122, 259–270, 2007. doi:10.1121/1.2739420
12. Vanmaele C., Vandepitte D., Desmet W., An Efficient Wave Based Prediction Technique for Plate Bending Vibrations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.*, 196, 3179–3189, 2007. doi: 10.1016/j.cma.2007.03.002
 13. De Rosa S., Franco F., On the Use of the Asymptotic Scaled Modal Analysis for Time-harmonic Structural Analysis and for the Prediction of Coupling Loss Factors for Similar Systems, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 24, 455–480, 2010. doi: 10.1016/j.ymssp.2009.07.008
 14. Reynders E., Langley R.S., Dijckmans A., Vermeir G., A Hybrid Finite Element – Statistical Energy Analysis Approach to Robust Sound Transmission Modeling, *Journal of Sound and Vibration*, 333, 4621–4636, 2014. doi: 10.1016/j.jsv.2014.04.051
 15. Seçgin A., Kara M., Ozankan A., A Modal Impedance Technique for Mid and High Frequency Analysis of an Uncertain Stiffened Composite Plate, *Journal of Sound and Vibration*, 366, 396–406, 2016. doi: 10.1016/j.jsv.2015.12.027
 16. Seçgin A., Güler S., Kara M., Determinations of in-situ Energy Loss Factors of Point-connected Composite Plates, *Composites Part B:Engineering*, 87, 27–32, 2016. doi: 10.1016/j.compositesb.2015.09.019
 17. Rabbio G., Bernhard R.J., Milner F.A., Definition of a High-frequency Threshold for Plates and Acoustical Spaces, *Journal of Sound and Vibration*, 277, 647–667, 2004. doi: 10.1016/j.jsv.2003.09.015